# Exercise 2

Evaluate

**(a)** $[[\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_2] \times \boldsymbol{\delta}_1]$ **(c)** $(\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\delta})$
**(b)** $(\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2)$ **(d)** $\{\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}\}$

---

## Solution

**(a)** $$[\boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_2] \times \boldsymbol{\delta}_1 = [\boldsymbol{\delta}_1(\boldsymbol{\delta}_2 \cdot \boldsymbol{\delta}_2)] \times \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_1 \times \boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{0}$$

**(b)** $$\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j\delta_{ij}\right) : \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j : \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_2)\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_2)(\boldsymbol{\delta}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_1)\delta_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{i2}\delta_{j1}\delta_{ij} = \delta_{21} = 0$$

**(c)** $$\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\delta} = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j\delta_{ij}\right) : \left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{\delta}_l\delta_{kl}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j : \boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{\delta}_l)\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(\boldsymbol{\delta}_i \cdot \boldsymbol{\delta}_l)(\boldsymbol{\delta}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_k)\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \delta_{jk}\delta_{jk}$$
$$= \sum_{k=1}^{3} \delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

**(d)** 
$$\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{\delta} = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j\delta_{ij}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_k\boldsymbol{\delta}_l\delta_{kl}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i(\boldsymbol{\delta}_j\cdot\boldsymbol{\delta}_k)\boldsymbol{\delta}_l\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i\delta_{jk}\boldsymbol{\delta}_l\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_l\delta_{ij}\delta_{jl}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_l\delta_{il}$$
$$= \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\delta}_1\boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\delta}_2\boldsymbol{\delta}_2 + \boldsymbol{\delta}_3\boldsymbol{\delta}_3$$