Problem 21

If $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ and $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$, find

(a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

(b) $\mathbf{AB}$

(c) $d\mathbf{A}/dt$

(d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt$

Solution

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + 3\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6e^t & 3e^{-t} & 9e^{2t} \\ -3e^t & 6e^{-t} & 3e^{2t} \\ 9e^t & -3e^{-t} & -3e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7e^t & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^t & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^t & 3e^{3t} + 2e^t - 1 \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^t & 6e^{3t} + e^t + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^t & -3e^{3t} + 3e^t - 2e^{4t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(e^t) & \frac{d}{dt}(2e^{-t}) & \frac{d}{dt}(e^{2t}) \\ \frac{d}{dt}(2e^t) & \frac{d}{dt}(e^{-t}) & \frac{d}{dt}(-e^{2t}) \\ \frac{d}{dt}(-e^t) & \frac{d}{dt}(3e^{-t}) & \frac{d}{dt}(2e^{2t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^t & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} dt &= \begin{pmatrix} \int_0^1 e^t\,dt & \int_0^1 2e^{-t}\,dt & \int_0^1 e^{2t}\,dt \\ \int_0^1 2e^t\,dt & \int_0^1 e^{-t}\,dt & -\int_0^1 e^{2t}\,dt \\ -\int_0^1 e^t\,dt & \int_0^1 3e^{-t}\,dt & \int_0^1 2e^{2t}\,dt \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e - 1 & 2 - \frac{2}{e} & \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \\ 2e - 2 & 1 - \frac{1}{e} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 \\ 1 - e & 3 - \frac{3}{e} & e^2 - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$