Problem A.23

Show that if two matrices commute in *one* basis, then they commute in *any* basis. That is:

$$[\mathsf{T}_1^e, \mathsf{T}_2^e] = 0 \Rightarrow \left[\mathsf{T}_1^f, \mathsf{T}_2^f\right] = 0. \tag{A.94}$$

Hint: Use Equation A.64.

Solution

Suppose that

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathsf{T}_1^e, \mathsf{T}_2^e] \\ &= \mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e - \mathsf{T}_2^e\mathsf{T}_1^e. \end{aligned}$$

Then $\mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e = \mathsf{T}_2^e\mathsf{T}_1^e$. Now calculate the commutator of the two matrices in a new basis.

$$\begin{aligned} \left[\mathsf{T}_1^f, \mathsf{T}_2^f\right] &= \mathsf{T}_1^f\mathsf{T}_2^f - \mathsf{T}_2^f\mathsf{T}_1^f \\ &= (\mathsf{S}\mathsf{T}_1^e\mathsf{S}^{-1})(\mathsf{S}\mathsf{T}_2^e\mathsf{S}^{-1}) - (\mathsf{S}\mathsf{T}_2^e\mathsf{S}^{-1})(\mathsf{S}\mathsf{T}_1^e\mathsf{S}^{-1}) \\ &= \mathsf{S}\mathsf{T}_1^e(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S})\mathsf{T}_2^e\mathsf{S}^{-1} - \mathsf{S}\mathsf{T}_2^e(\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S})\mathsf{T}_1^e\mathsf{S}^{-1} \\ &= \mathsf{S}\mathsf{T}_1^e(\mathsf{I})\mathsf{T}_2^e\mathsf{S}^{-1} - \mathsf{S}\mathsf{T}_2^e(\mathsf{I})\mathsf{T}_1^e\mathsf{S}^{-1} \\ &= \mathsf{S}\mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e\mathsf{S}^{-1} - \mathsf{S}\mathsf{T}_2^e\mathsf{T}_1^e\mathsf{S}^{-1} \\ &= \mathsf{S}(\mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e)\mathsf{S}^{-1} - \mathsf{S}(\mathsf{T}_2^e\mathsf{T}_1^e)\mathsf{S}^{-1} \\ &= \mathsf{S}(\mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e)\mathsf{S}^{-1} - \mathsf{S}(\mathsf{T}_1^e\mathsf{T}_2^e)\mathsf{S}^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$